Популярные лекции
по математике

А. Г. КУРОШ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ

АН
КНИГА
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 7

А. Г. КУРОШ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книжка написана на основе лекции, прочитанной автором в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова для участников математической олимпиады — школьников девятого и десятого классов. В ней, рассчитывая на уровень знаний ученика девятого класса средней школы, мы даем обзор результатов и методов общей теории алгебраических уравнений. Доказательства при этом совсем не приводятся, так как иначе пришлось бы переписывать почти половину университетского учебника высшей алгебры. Даже при этом условии чтение книжки не превращается, понятно, в легкое развлечение: всякая математическая книга, даже популярная, требует от читателя сосредоточенного внимания, обдумывания всех определений и формулировок, проверки вычислений во всех примерах, применения излагаемых методов к другим примерам, придуманным самим читателем, и т. д.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Школьный курс алгебры содержит разнообразный материал, однако его центральным пунктом является вопрос об уравнениях. Ограничиваясь уравнениями с одним неизвестным, напомним то очень немногое, что о них рассказывается в средней школе.

Всякий школьник умеет, прежде всего, решать уравнения первой степени: если дано уравнение

$$ax + b = 0,$$

где $a \neq 0$, то его единственным корнем будет число

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Школьник знает, далее, формулу для решения квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$. Именно,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если коэффициенты уравнения — действительные числа, то эта формула дает два различных действительных корня в том случае, когда под знаком радикала стоит положительное число, т. е. $b^2 - 4ac > 0$. Если же $b^2 - 4ac = 0$, то наше уравнение имеет лишь один корень; его называют в этом случае *кратным* корнем; при $b^2 - 4ac < 0$ уравнение вообще не имеет действительных корней.

Наконец, школьник умеет решать некоторые типы уравнений третьей и четвертой степеней, а именно те, решение которых легко сводится к решению квадратных уравнений. Таково, например, уравнение третьей степени:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0,$$

которое имеет один корень $x = 0$, а затем после сокра-

щения на x превращается в квадратное уравнение:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

К квадратному уравнению сводится также и уравнение четвертой степени:

$$ay^4 + by^2 + c = 0,$$

называемое *биквадратным*; достаточно положить в этом уравнении $y^2 = x$, найти корни полученного квадратного уравнения и затем извлечь из них квадратные корни.

Мы еще раз подчеркнем, что это всего лишь некоторые весьма частные типы уравнений третьей и четвертой степеней. Никаких методов для решения произвольных уравнений этих степеней и тем более для решения произвольных уравнений более высоких степеней в школьной алгебре не дается. В различных вопросах техники, механики и физики часто приходится, однако, иметь дело с алгебраическими уравнениями довольно высокой степени. Теория алгебраических уравнений произвольной n-й степени, где n — некоторое целое положительное число, разрабатывалась на протяжении нескольких столетий и составляет сейчас одну из основных частей курса высшей алгебры, изучаемого в университетах и педагогических институтах.

§ 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Теория алгебраических уравнений существенным образом опирается на теорию комплексных чисел, основы которой изучаются в старшем классе средней школы. Часто, однако, у школьника остаются сомнения в законности этих чисел, в их реальном существовании. Такие сомнения возникали и у ученых, когда несколько столетий тому назад комплексные числа начинали входить в математический обиход; это отразилось и в сохранившемся от тех времен названии «мнимые числа». Для современной науки, однако, ничего таинственного в комплексных числах нет, и они являются столь же мало «мнимыми», как и числа отрицательные или числа иррациональные.

Потребность в комплексных числах возникла в связи с тем, что из отрицательного действительного числа нельзя извлечь квадратный корень, оставаясь в области действительных чисел. Это, как мы знаем, приводит

к тому, что некоторые квадратные уравнения не имеют действительных корней; уравнение

$$x^2 + 1 = 0$$

будет простейшим из таких уравнений. Нельзя ли расширить запас чисел так, чтобы и эти уравнения обладали корнями?

Школьнику несколько раз приходилось встречаться с расширением того запаса чисел, которым он располагает. Он начинал с изучения в элементарной арифметике целых положительных чисел. Очень скоро появились и дроби. В курсе алгебры были добавлены отрицательные числа, т. е. была получена система всех рациональных чисел. Наконец, присоединение иррациональных чисел привело к системе всех действительных (или вещественных) чисел.

Каждое из этих последовательных расширений запаса чисел позволяло находить корни для некоторых из тех уравнений, которые раньше, до рассматриваемого расширения, корней не имели. Так, уравнение

$$2x - 1 = 0$$

стало обладать корнем лишь после введения дробей, уравнение

$$x + 1 = 0$$

— после введения отрицательных чисел, а уравнение

$$x^2 - 2 = 0$$

— лишь после присоединения иррациональных чисел.

Все это вполне оправдывает еще один шаг на пути обогащения запаса чисел, и мы в общих чертах наметим сейчас, как этот последний шаг осуществляется.

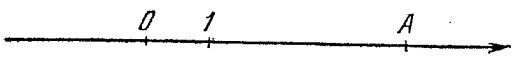


Рис. 1.

Как известно, если дана прямая линия и на ней задано положительное направление, отмечена точка O и выбрана единица масштаба (рис. 1), то всякой точке A этой прямой можно поставить в соответствие ее координату, т. е. действительное число, выражающее в выбранных единицах масштаба расстояние от A до O, если A лежит справа от точки O, или расстояние, взятое со знаком минус, если A лежит слева от O. Всем

точкам прямой таким путем ставятся в соответствие различные действительные числа, причем можно доказать, что всякое действительное число будет при этом использовано. Можно считать, следовательно, что точки нашей прямой являются изображениями соответствующих им действительных чисел, т. е. что эти числа как бы уложены на прямую линию. Назовем нашу прямую *числовой прямой.*

Нельзя ли расширить запас чисел так, чтобы новые числа столь же естественным способом изображались точками плоскости? Такой системы чисел, более широкой чем система действительных чисел, у нас пока нет, её еще нужно построить.

Построение следует начать с указания того, из какого «материала» будет «строиться» новая система чисел, т. е. какие объекты будут играть роль новых чисел, а затем нужно определить, как над этими объектами, т. е. над этими будущими числами, должны производиться алгебраические операции — сложение и умножение, вычитание и деление. Так как мы хотим построить такие числа, которые изображались бы всеми точками плоскости, то проще всего сами точки плоскости рассматривать в качестве новых чисел. Для того чтобы эти точки действительно могли считаться числами, следует лишь определить, как производить над ними алгебраические операции, т. е. какая точка должна называться суммой двух данных точек плоскости, какая должна называться их произведением и т. д.

Подобно тому как положение точки на прямой вполне определяется одним действительным числом — его координатой, положение всякой точки на плоскости может быть определено парой действительных чисел. Для этого возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O, и на каждой из них зададим положительное направление и отметим единицу масштаба (рис. 2). Назовем эти прямые *осями координат*, в частности, горизонтальную прямую — *осью абсцисс*, вертикальную — *осью ординат*. Вся плоскость разбивается осями координат на четыре четверти, которые нумеруются так, как указано на чертеже.

Положение любой точки A из первой четверти (см. рис. 2) вполне определяется заданием двух положительных действительных чисел — числа a, выражающего в выбранных единицах масштаба расстояние этой точ-

ки до оси ординат (абсцисса точки A), и числа b, выражающего в выбранных единицах масштаба ее расстояние до оси абсцисс (ордината точки A). Обратно, для любой пары (a, b) положительных действительных чисел можно указать в первой четверти вполне определенную точку, имеющую a своей абсциссой и b — своей ординатой. Аналогично задаются точки и в других четвертях. Однако, для того чтобы обеспечить взаимную однозначность соответствия между всеми точками плоскости и парами их координат (a, b), т. е. избежать того, чтобы нескольким различным точкам плоскости соответствовала одна и та же пара координат (a, b), мы считаем отрицательными абсциссы точек, лежащих в четвертях *II* и *III*, и ординаты точек, лежащих в четвертях *III* и *IV*. Заметим, что точки, лежащие на оси абсцисс, задаются координатами вида $(a, 0)$, а точки, лежащие на оси ординат, — координатами вида $(0, b)$, где a и b — некоторые действительные числа.

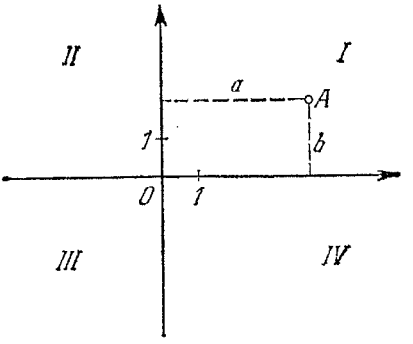


Рис. 2.

Мы научились задавать парами действительных чисел все точки на плоскости. Это позволяет нам говорить в дальнейшем не о точке A, задаваемой координатами (a, b), а просто о точке (a, b).

Определим теперь сложение и умножение точек плоскости. Эти определения покажутся в первый момент очень искусственными, но можно было бы доказать, что лишь при таких определениях достигается наша цель, а именно появляется возможность извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел.

Пусть на плоскости даны точки (a, b) и (c, d). До сих пор мы не знали, что следует понимать под суммой и произведением этих точек. Назовем теперь их *суммой* точку с абсциссой $a + c$ и ординатой $b + d$, т. е.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Назовем, с другой стороны, *произведением* заданных

точек точку с абсциссой $ac - bd$ и ординатой $ad + bc$, т. е.

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Легко проверить, что определенные нами операции над точками плоскости обладают всеми обычными свойствами операций над числами: сложение и умножение точек плоскости коммутативны, или перестановочны (т. е. можно переставлять слагаемые и сомножители), ассоциативны, или сочетательны (т. е. сумма и произведение трех точек не зависят от расстановки скобок) и связаны законом дистрибутивности, или распределительности (т. е. правилом раскрытия скобок). Заметим, что ассоциативность сложения и умножения точек позволяет однозначным образом ввести сумму и произведение любого конечного числа точек плоскости.

Для точек плоскости выполнимы теперь и операции вычитания и деления, обратные соответственно сложению и умножению, обратные в том смысле, что в любой системе чисел разность двух чисел может быть определена как число, сумма которого с вычитаемым равна уменьшаемому, а частное двух чисел — как число, произведение которого на делитель равно делимому. Именно:

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d),$$

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right).$$

Читатель без труда проверит, что произведение точки, стоящей в правой части последнего равенства, на точку (c, d), — произведение понимается, конечно, в смысле того определения, которое было дано выше, — в самом деле равно точке (a, b). Еще проще убедиться в том, что сумма точки, стоящей в правой части первого равенства, и точки (c, d) действительно равна точке (a, b).

Применяя наши определения к точкам, лежащим на оси абсцисс, т. е. к точкам вида $(a, 0)$, мы получаем:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0),$$

т. е. сложение и умножение этих точек сводятся к сложению и умножению их абсцисс. Это же верно и для вычитания и деления:

$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0),$$

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0\right).$$

Если мы будем считать, что всякая точка $(a, 0)$ оси абсцисс служит изображением действительного числа a — своей абсциссы, т. е. отождествим точку $(a, 0)$ с самим числом a, то ось абсцисс просто превратится в числовую прямую. Мы можем теперь считать, что построенная нами из точек плоскости новая числовая система содержит, в частности, все действительные числа, а именно в качестве точек оси абсцисс.

Точки оси ординат уже не могут быть отождествлены с действительными числами. Рассмотрим, например, точку $(0, 1)$, лежащую на оси ординат на расстоянии 1 вверх от точки O. Обозначим эту точку буквой i:

$$i = (0, 1),$$

и найдем ее квадрат в смысле умножения точек плоскости:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Точка $(-1, 0)$ лежит, однако, не на оси ординат, а на оси абсцисс и поэтому изображает действительное число -1, т. е.

$$i^2 = -1.$$

Мы нашли, следовательно, в нашей новой числовой системе такое число, квадрат которого равен действительному числу -1, т. е. теперь уже можно извлекать из -1 квадратный корень. Другим значением этого корня будет точка $-i = (0, -1)$. Заметим, что точка $(0, 1)$, обозначенная нами через i, является вполне определенной точкой плоскости, и то, что ее называют обычно «мнимой единицей», никак не мешает ее реальному существованию на плоскости.

Построенная нами числовая система, более широкая чем система действительных чисел, называется системой *комплексных чисел*, а сами точки плоскости с определенными выше операциями над ними — *комплексными числами*. Легко показать, используя эти операции, что всякое комплексное число может быть выражено через действительные числа и число i. Пусть, в самом деле, дана точка (a, b). Ввиду определения сложения справедливо равенство

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b).$$

Слагаемое $(a, 0)$ лежит на оси абсцисс и поэтому является действительным числом a. Второе же слагаемое может быть записано по определению умножения в

виде

$$(0, b) = (b, 0)(0, 1).$$

Первый множитель правой части этого равенства совпадает с действительным числом b, а второй равен i. Таким образом,

$$(a, b) = a + bi,$$

где сложение и умножение нужно понимать в смысле операций над точками плоскости.

Получив эту обычную запись комплексных чисел, мы сейчас же можем соответственно переписать приведенные выше формулы для операций над комплексными числами:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Заметим, что данное нами ранее определение умножения точек плоскости находится в полном согласии с законом дистрибутивности: если в левой части второго из написанных выше равенств мы найдем произведение по правилу умножения двучлена на двучлен, вытекающему из закона дистрибутивности, а затем воспользуемся равенством $i^2 = -1$ и приведем подобные члены, то как раз и получим правую часть этого равенства.

§ 3. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Располагая комплексными числами, мы можем извлекать квадратный корень не только из числа -1, но и из любого отрицательного действительного числа, причем будем получать два различных значения. Именно, если $-a$ есть отрицательное действительное число, т. е. $a > 0$, то

$$\sqrt{-a} = \pm \sqrt{a}\,i,$$

где $\sqrt{a}$ — положительное значение квадратного корня из положительного числа a.

Возвращаясь к решению рассматривавшегося во введении квадратного уравнения с действительными коэффициентами, мы можем теперь сказать, что и в случае $b^2 - 4ac < 0$ это уравнение имеет два различных корня, но уже комплексных.

Комплексных чисел достаточно и для того, чтобы извлекать квадратные корни из любых комплексных чисел, а не только из действительных. Именно, если дано комплексное число $a + bi$, то

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}+i\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})},$$

где оба раза берется положительное значение радикала $\sqrt{a^2+b^2}$. Читатель видит, конечно, что при любых a и b и первое слагаемое правой части, и коэффициент при i будут действительными числами. Каждый из этих двух радикалов имеет два значения, которые комбинируются друг с другом по следующему правилу: если $b > 0$, то положительное значение одного радикала складывается с положительным значением другого, а отрицательное — с отрицательным; если же $b < 0$, то положительное значение одного радикала складывается с отрицательным значением другого.

Пример. Извлечь квадратный корень из числа $21 - 20i$. Здесь

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{441+400}=29,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}=\sqrt{\frac{1}{2}(21+29)}=\pm 5,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}=\sqrt{\frac{1}{2}(-21+29)}=\pm 2.$$

Так как $b = -20$, т. е. $b < 0$, то комбинируются значения последних радикалов с разными знаками, т. е.

$$\sqrt{21-20i}=\pm(5-2i).$$

Научившись извлекать квадратные корни из комплексных чисел, мы получили возможность решать квадратные уравнения с любыми комплексными коэффициентами. Действительно, вывод формулы для решения квадратного уравнения сохраняет силу и в случае комплексных коэффициентов, а вычисление входящего в эту формулу квадратного корня мы можем, как показано выше, свести к извлечению квадратных корней из двух положительных действительных чисел. Квадратное уравнение с любыми комплексными коэффициентами обладает, следовательно, двумя корнями, которые могут случайно совпасть, т. е. дать один кратный корень.

Пример. Решить уравнение

$$x^2-(4-i)x+(5-5i)=0.$$

Применяя формулу, получим

$$x = \frac{(4-i) \pm \sqrt{(4-i)^2 - 4(5-5i)}}{2} = \frac{(4-i) \pm \sqrt{-5+12i}}{2}.$$

Извлекая изложенным выше методом входящий сюда квадратный корень, мы найдем, что

$$\sqrt{-5+12i} = \pm (2+3i),$$

откуда

$$x = \frac{(4-i) \pm (2+3i)}{2}.$$

Корнями нашего уравнения будут, следовательно, числа

$$x_1 = 3+i, \quad x_2 = 1-2i.$$

Легкая проверка показывает, что каждое из этих чисел действительно удовлетворяет уравнению.

Переходим к вопросу об извлечении корней любой целой положительной степени n из комплексных чисел. Можно доказать, что для любого комплексного числа α существует ровно n таких различных комплексных чисел, что каждое из них, будучи возведено в n-ю степень (т. е. если будет взято произведение n множителей, равных этому числу), дает число α. Иными словами, справедлива следующая очень важная теорема:

Корень n-й степени из любого комплексного числа имеет ровно n различных комплексных значений.

Эта теорема применима и к действительным числам, которые являются частным случаем комплексных чисел: корень n-й степени из действительного числа a имеет ровно n различных значений, в общем случае комплексных; действительных среди этих значений, как известно, будет два, одно или ни одного в зависимости от знака числа a и четности числа n.

Так, кубичный корень из единицы имеет три значения:

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

легко проверяется, что каждое из этих трех чисел, взятое в кубе, дает единицу. Значениями корня четвертой степени из единицы служат числа

$$1, \quad -1, \quad i \quad \text{и} \quad -i.$$

Выше была приведена формула для извлечения квадратного корня из комплексного числа $a+bi$. Эта формула сводит извлечение указанного корня к извлечению квадратных корней из двух положительных дей-

ствительных чисел. К сожалению, при $n \geqslant 2$ не существует формулы, которая выражала бы корень n-й степени из комплексного числа $a + bi$ через действительные значения радикалов из некоторых вспомогательных действительных чисел; доказано, что такая формула и не может быть получена. Корни n-й степени из комплексных чисел извлекаются обычно путем перехода к новой записи этих чисел, так называемой *тригонометрической*, чего, однако, мы не будем здесь излагать.

§ 4. КУБИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы знаем формулу для решения квадратного уравнения, причем эта формула годна даже в случае комплексных коэффициентов. Оказывается, что для уравнений третьей степени, или, как говорят, кубичных уравнений, также может быть указана формула, правда, более сложная, выражающая корни этих уравнений через их коэффициенты при помощи радикалов; эта формула также справедлива для уравнений с любыми комплексными коэффициентами.

Пусть дано уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Преобразуем это уравнение, положив

$$x = y - \frac{a}{3},$$

где y — новое неизвестное. Подставив это выражение x в наше уравнение, мы получим кубичное уравнение относительно неизвестного y, причем более простое, так как коэффициент при y^2 окажется равным нулю. Коэффициентом при первой степени y и свободным членом будут соответственно числа

$$p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c,$$

т. е. уравнение сокращенно запишется в виде

$$y^3 + py + q = 0.$$

Если мы найдем корни этого нового уравнения, то, вычитая из них по $\frac{a}{3}$, получим корни исходного уравнения.

Корни нашего нового уравнения выражаются через его коэффициенты при помощи следующей формулы:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Каждый из входящих в нее кубичных радикалов имеет, как мы знаем, три значения. Нельзя, однако, комбинировать их произвольным образом. Оказывается, что для каждого значения первого радикала можно указать одно единственное такое значение второго радикала, что произведение их равно числу $-\frac{p}{3}$. Именно эти два значения радикалов и нужно складывать для того, чтобы получить корень уравнения. Мы получим таким путем три корня нашего уравнения. Всякое кубичное уравнение с любыми числовыми коэффициентами имеет, следовательно, три корня, в общем случае комплексных; некоторые из этих корней могут, конечно, совпадать, т. е. превратиться в кратный корень.

Практическое значение приведенной формулы весьма невелико. В самом деле, пусть коэффициенты p и q — действительные числа. Можно показать, что если уравнение

$$y^3+py+q=0$$

имеет три различных действительных корня, то выражение

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

будет отрицательным. Оно стоит в формуле под знаком квадратного корня, а поэтому после извлечения этого корня мы получим под знаком каждого из двух кубичных корней комплексное число. Выше было сказано, однако, что извлечение кубичного корня из комплексного числа требует перехода к тригонометрической записи, а это может быть сделано лишь приближенно, по таблицам.

Пример. Уравнение

$$x^3-19x+30=0$$

не содержит квадрата неизвестного, и поэтому применяем к нему указанную выше формулу, не выполняя предварительных преобразований. Здесь $p=-19$, $q=30$, следовательно,

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{784}{27},$$

т. е. отрицательно. Первый из кубичных радикалов, входящих в формулу, имеет вид

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-15+\sqrt{-\frac{784}{27}}}=$$

$$=\sqrt[3]{-15+i\sqrt{\frac{784}{27}}}.$$

Мы не можем выразить этот кубичный радикал через радикалы из действительных чисел, а поэтому не можем найти по формуле корни нашего уравнения. На самом же деле, как показывает непосредственная проверка, этими корнями служат целые числа 2, 3 и —5.

Указанная формула для решения кубичного уравнения практически приводит к разысканию корней уравнения лишь в тех случаях, когда выражение $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ положительно или же равно нулю. В первом из этих случаев уравнение имеет один действительный и два комплексных корня, во втором — все корни действительные, но один из них кратный.

Пример. Решить кубичное уравнение

$$x^3-9x^2+36x-80=0.$$

Полагая

$$x=y+3,$$

мы получим «приведенное» уравнение

$$y^3+9y-26=0,$$

к которому можно применить формулу. Здесь

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=196=14^2,$$

и поэтому

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{13+14}=\sqrt[3]{27}.$$

Одним из значений этого кубичного радикала будет число 3. Произведение этого значения на соответствующее ему значение второго кубичного радикала, входящего в формулу, должно, как мы знаем, равняться числу $-\frac{p}{3}$, т. е. в нашем случае равняться числу —3. Искомым значением второго радикала будет, следовательно, число —1, и поэтому одним из корней приведенного уравнения служит

$$y_1=3+(-1)=2.$$

Теперь, когда один из корней кубичного уравнения получен, найти два других можно многими разными способами. Можно, например, найти два других значения радикала $\sqrt[3]{27}$, вычислить соответствующие им значения второго радикала и сложить соответствующие друг другу значения радикалов. Можно поступить иначе, а именно разделить левую часть приведенного уравнения на $y-2$, после чего останется решить квадратное уравнение. Любой из этих способов покажет, что двумя другими корнями нашего приведенного уравнения служат числа

$$-1+i\sqrt{12} \quad \text{и} \quad -1-i\sqrt{12}.$$

Корнями исходного кубичного уравнения будут, следовательно, числа

$$5,\ 2+i\sqrt{12} \quad \text{и} \quad 2-i\sqrt{12}.$$

Понятно, что далеко не всегда радикалы берутся так легко, как в рассмотренном нами специально подобранном примере, — гораздо чаще их приходится вычислять приближенно и поэтому получать лишь приближенные значения корней уравнения.

§ 5. О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ И О СУЩЕСТВОВАНИИ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ

Для уравнений четвертой степени также может быть указана формула, выражающая корни этих уравнений через их коэффициенты. Эта формула гораздо сложнее формулы для решения кубичного уравнения, она содержит еще более многоэтажные радикалы, а поэтому ее практическая применимость оказывается гораздо меньшей. Из этой формулы можно вывести, однако, что всякое уравнение четвертой степени с любыми числовыми коэффициентами имеет четыре комплексных корня, некоторые из которых могут быть и действительными.

Формулы для решения уравнений третьей и четвертой степеней были найдены еще в XVI в. В это же время начались поиски формулы для решения уравнений пятой степени и более высоких степеней. Заметим, что общий вид уравнения n-й степени, где n — целое положительное число, таков:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ \ldots\ +a_{n-1}x+a_n=0.$$

Эти поиски безуспешно продолжались до начала XIX в.,

когда был, наконец, доказан следующий замечательный результат:

Ни для какого n, большего или равного пяти, нельзя указать формулу, которая выражала бы корни любого уравнения n-й степени через его коэффициенты при помощи радикалов.

Больше того, для любого n, большего или равного пяти, можно указать уравнение n-й степени с целыми коэффициентами, корни которого никак не выражаются через радикалы, сколь угодно многоэтажные, если в подрадикальных выражениях используются лишь целые и дробные числа. Таково, например, уравнение

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Можно доказать, что это уравнение имеет пять корней — три действительных и два комплексных, но ни один из этих корней не может быть записан через радикалы, т. е. это уравнение «не разрешимо в радикалах». Таким образом, запас чисел, действительных или комплексных, которые служат корнями уравнений с целыми коэффициентами (такие числа называются *алгебраическими* в противоположность числам *трансцендентным*, которые не являются корнями никаких уравнений с целыми коэффициентами), много шире запаса чисел, записываемых через радикалы.

Теория алгебраических чисел является важной ветвью алгебры; существенный вклад внесли в нее отечественные математики: Е. И. Золоторев (1847—1878), Г. Ф. Вороной (1868—1908), Н. Г. Чеботарев (1894—1947).

Доказательство невозможности разыскания общих формул для решения в радикалах уравнений n-й степени при $n \geqslant 5$ было найдено Абелем (1802—1829). Существование не разрешимых в радикалах уравнений с целыми коэффициентами установил Галуа (1811—1832); он нашел также условия, при которых уравнение может быть решено в радикалах. Все эти результаты потребовали создания новой глубокой теории, а именно теории групп. Понятие группы позволило исчерпать вопрос о разрешимости уравнений в радикалах, а позже оно нашло многочисленные другие применения в различных отделах математики и за ее пределами и стало одним из важнейших объектов изучения в алгебре. Мы не будем определять сейчас этого понятия,

но отметим, что в разработке теории групп руководящая роль принадлежит в настоящее время советским алгебраистам.

Отсутствие формул для решения уравнений n-й степени при $n \geqslant 5$ не вызывает серьезных затруднений, если говорить о практическом разыскании корней уравнений. Оно полностью компенсируется многочисленными методами приближенного решения уравнений, которые даже в случае кубичных уравнений ведут к цели гораздо быстрее, чем применение формулы (там, где она вообще применима) и последующее приближенное извлечение действительных радикалов. Однако существование формул для уравнений второй, третьей и четвертой степеней позволило доказать, что эти уравнения обладают соответственно двумя, тремя или четырьмя корнями. Как же обстоит дело с существованием корней для уравнений n-й степени при любом n?

Если бы существовали уравнения с числовыми коэффициентами, действительными или комплексными, которые не имеют ни одного действительного или комплексного корня, то возникла бы задача дальнейшего расширения запаса чисел. В этом, однако, нет необходимости: комплексных чисел достаточно для решения любых уравнений с числовыми коэффициентами. Именно, справедлива следующая теорема:

Всякое уравнение n-й степени с любыми числовыми коэффициентами имеет n корней, комплексных или, в частности, действительных; некоторые из этих корней могут, конечно, совпасть, т. е. оказаться кратными.

Эта теорема называется *основной теоремой высшей алгебры*. Она была доказана Даламбером (1717—1783) и Гауссом (1777—1855) еще в XVIII в., хотя лишь в XIX в. эти доказательства были доведены до полной строгости; в настоящее время существует несколько десятков ее различных доказательств.

Понятие кратности корня, упомянутое в формулировке основной теоремы, имеет следующий смысл. Можно доказать, что если уравнение n-й степени

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

имеет n корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то левая часть уравнения обладает следующим разложением на множители:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Обратно, если для левой части нашего уравнения дано такое разложение, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будут служить корнями этого уравнения. Среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ некоторые могут оказаться равными друг другу. Если, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k$, но $\alpha_1 \neq \alpha_l$ при $l = k+1, k+2, \ldots, n$, т. е. в рассматриваемом разложении множитель $x - \alpha_1$ встречается на самом деле k раз, то при $k > 1$ корень α_1 называют *кратным* или, точнее, *k-кратным*.

§ 6. ЧИСЛО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ

Основная теорема высшей алгебры находит существенные применения во многих теоретических исследованиях, но не дает никакого метода для практического разыскания корней уравнений. Во многих вопросах техники встречаются, однако, уравнения, как правило, с действительными коэффициентами, о корнях которых необходимо иметь ту или иную информацию. Знать точно эти корни обычно нет необходимости, так как сами коэффициенты уравнения получены в результате измерений и поэтому известны лишь с некоторым приближением, зависящим от точности измерений.

Пусть дано уравнение n-й степени

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с действительными коэффициентами. Оно имеет, как мы знаем, n корней. Первые вопросы, которые естественно возникают, таковы: имеются ли среди этих корней действительные, сколько их, где примерно они расположены? Ответ на эти вопросы может быть получен следующим путем. Обозначим многочлен, стоящий в левой части нашего уравнения, через $f(x)$, т. е.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Читатель, знакомый с понятием функции, поймет, что мы рассматриваем левую часть уравнения как функцию переменного x. Беря для x произвольное числовое значение α и подставляя его в выражение для $f(x)$, мы после выполнения всех указанных операций получим некоторое число, которое называется *значением* многочлена $f(x)$ и обозначается через $f(\alpha)$. Так, если

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

и $\alpha = 2$, то

$$f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = -7.$$

Построим график многочлена $f(x)$. Для этого возьмем на плоскости оси координат (см. выше) и, выбрав для x некоторое значение α и вычислив соответствующее значение $f(\alpha)$ многочлена $f(x)$, отметим на плоскости точку с абсциссой α и ординатой $f(\alpha)$, т. е. точку $(\alpha, f(\alpha))$. Если бы мы могли проделать это для всех α, то точки, отмеченные нами на плоскости, составили бы некоторую кривую линию. Точки пересечения или касания этой кривой с осью абсцисс указывают нам, каковы те значения α, для которых $f(\alpha) = 0$, т. е. каковы действительные корни заданного нам уравнения.

К сожалению, мы не можем найти точки $(\alpha, f(\alpha))$ для всех значений α, так как их бесконечно много, и принуждены ограничиться конечным числом таких точек. Для простоты можно взять сначала несколько идущих подряд целых значений α, положительных и отрицательных, отметить на плоскости соответствующие им точки, а затем соединить их по возможности плавной кривой линией. При этом, как оказывается, достаточно брать лишь такие значения α, которые заключаем между $-B$ и B, где граница B определяется следующим образом: если $|a_0|$ — абсолютная величина коэффициента при x^n (напоминаем, что $|a| = a$ при $a > 0$ и $|a| = -a$ при $a < 0$), A — наибольшая из абсолютных величин всех остальных коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, то

$$B = \frac{A}{|a_0|} + 1.$$

Часто бывает видно, впрочем, что эти границы слишком широки.

Пример. Построить график многочлена

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1.$$

Здесь $|a_0| = 1$, $A = 5$, и поэтому $B = 6$. На самом деле в этом примере можно ограничиться лишь теми значениями α, которые заключены между -1 и 5. Составим таблицу значений многочлена $f(x)$ и построим график (рис. 3).

α	$f(\alpha)$
-1	-7
0	1
1	-1
2	-7
3	-11
4	-7
5	11

График показывает, что все три корня α_1, α_2 и α_3 нашего уравнения действительны и что они заключены в таких пределах:

$$-1 < \alpha_1 < 0, \quad 0 < \alpha_2 < 1, \quad 4 < \alpha_3 < 5.$$

Мы замечаем, что график можно было и не строить: его пересечения с осью абсцисс расположены между такими соседними значениями α, для которых числа $f(\alpha)$ имеют разные знаки, а поэтому достаточно было посмотреть на таблицу значений $f(\alpha)$.

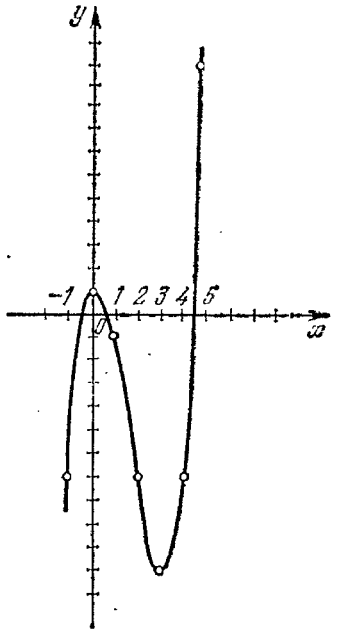


Рис. 3.

Если бы мы нашли в нашем примере не три точки пересечения графика с осью абсцисс, а меньше, то могли бы возникнуть сомнения, не пропустили ли мы благодаря несовершенству нашего построения еще несколько корней уравнения, — мы проводили кривую линию, зная лишь семь ее точек. Существуют, впрочем, методы, позволяющие точно узнавать число действительных корней уравнения и даже число корней, расположенных между любыми данными числами a и b, где $a < b$. Излагать эти методы мы не будем.

Иногда полезны следующие теоремы, дающие некоторые сведения о существовании действительных или даже положительных корней.

Всякое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Если в уравнении с действительными коэффициентами старший коэффициент a_0 и свободный член a_n имеют разные знаки, то уравнение имеет хотя бы один положительный корень. Если же наше уравнение имеет, кроме того, четную степень, то оно обладает также и хотя бы одним отрицательным корнем.

Так уравнение

$$x^7 - 8x^3 + x - 2 = 0$$

имеет хотя бы один положительный корень, а уравнение

$$x^6 + 2x^5 - x^2 + 7x - 1 = 0$$

обладает как положительным, так и отрицательным корнем. Все это легко проверяется при помощи графика.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Выше мы нашли те соседние целые числа, между которыми расположены действительные корни уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Тот же метод позволяет найти корни этого уравнения точнее. Пусть, например, нас интересует корень α_2, расположенный между нулем и единицей. Вычисляя значения левой части нашего уравнения $f(x)$ при $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}9$, мы нашли бы, между какими двумя из этих последовательных значений для x график многочлена $f(x)$ пересекает ось абсцисс, т. е. вычислили бы корень α_2 уже с точностью до одной десятой.

Продолжая так далее, мы могли бы найти значение корня α_2 с точностью до одной сотой, до одной тысячной и теоретически с любой нужной нам точностью. Этот путь связан, однако, с громоздкими вычислениями, которые очень скоро делаются практически невыполнимыми. Ввиду этого разработаны различные методы, позволяющие быстрее вычислять приближенные значения действительных корней уравнений. Мы изложим самый простой из этих методов и сразу же применим его к вычислению корня α_2 рассматриваемого нами кубичного уравнения. При этом полезно сначала найти более узкие границы для этого корня, чем те границы: $0 < \alpha_2 < 1$, которые нам пока известны. Для этого вычислим наш корень с точностью до одной десятой. Если читатель будет вычислять значения многочлена

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$$

при $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}9$, то найдет, что

$$f(0{,}7) = 0{,}293, \quad f(0{,}8) = -0{,}088,$$

а поэтому, так как знаки этих значений $f(x)$ различны,

$$0{,}7 < \alpha_2 < 0{,}8.$$

Метод состоит в следующем. Пусть дано уравнение n-й степени, левую часть которого обозначим через $f(x)$, и пусть уже известно, что между a и b, где $a < b$, лежит один действительный корень α этого уравнения, не являющийся кратным. Если границы $a < \alpha < b$ уже достаточно узки, то по определенным формулам можно найти для корня α новые границы c и d, много более узкие, т. е. гораздо точнее определяющие положение этого корня; при этом будет или $c < \alpha < d$, или же $d < \alpha < c$.

Граница c вычисляется по формуле

$$c = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}.$$

В нашем примере $a = 0{,}7$, $b = 0{,}8$, а значения $f(a)$ и $f(b)$ указаны выше. Поэтому

$$c = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}293 - 0{,}7 \cdot (-0{,}088)}{0{,}293 - (-0{,}088)} = \frac{0{,}2344 + 0{,}0616}{0{,}381} = 0{,}7769\ldots$$

Формула для границы d требует введения одного нового понятия, которое будет играть у нас лишь служебную роль; по существу же оно относится к другой части математики, а именно к дифференциальному исчислению.

Пусть дан многочлен n-й степени

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

Назовем *производной* этого многочлена и обозначим через $f'(x)$ следующий многочлен $(n-1)$-й степени:

$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots$$
$$\ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Он получен из многочлена $f(x)$ по следующему правилу: каждый член a_kx^{n-k} многочлена $f(x)$ умножается на показатель степени $n-k$ при x, сам же этот показатель уменьшается на единицу; при этом свободный член a_n пропадает, так как можно считать, что $a_n = a_nx^0$.

От многочлена $f'(x)$ можно снова взять производную. Это будет многочлен $(n-2)$-й степени, который называется *второй производной* многочлена $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$.

Так, для рассматриваемого нами многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ будет

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2,$$
$$f''(x) = 6x - 10.$$

Граница d вычисляется теперь по одной из формул:

$$d = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad d = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Какую именно из этих двух формул следует выбрать, устанавливается по такому правилу. Если границы a, b были выбраны достаточно узкими, то вторая производная $f''(x)$ будет обычно иметь при $x = a$ и при $x = b$ один и тот же знак, в то время как знаки $f(a)$ и $f(b)$ будут, как нам известно, различными. Если совпадают знаки $f''(a)$ и $f(a)$, то нужно взять первую формулу для d, т. е. ту, в которой используется граница a; если же совпадают знаки $f''(b)$ и $f(b)$, то должна быть взята вторая формула, относящаяся к границе b.

В рассматриваемом нами примере вторая производная $f''(x)$ отрицательна как при $a = 0{,}7$, так и при $b = 0{,}8$. Поэтому, так как $f(a)$ положительно, а $f(b)$ отрицательно, следует взять для границы d вторую формулу. Так как $f'(0{,}8) = -4{,}08$, то

$$d = 0{,}8 - \frac{-0{,}088}{-4{,}08} = 0{,}8 - 0{,}0215\ldots = 0{,}7784\ldots$$

Таким образом, мы нашли для корня α_2 следующие границы, много более узкие, чем те, которые были известны нам раньше:

$$0{,}7769\ldots < \alpha_2 < 0{,}7784\ldots$$

или, немного расширяя эти границы,

$$0{,}7769 < \alpha_2 < 0{,}7785.$$

Отсюда следует, что если мы возьмем для α_2 среднее значение, т. е. полусумму найденных границ,

$$\alpha_2 = 0{,}7777,$$

то сделаем ошибку, не превосходящую числа 0,0008, равного полуразности этих границ.

Если полученная точность недостаточна, то к найденным новым границам корня α_2 можно было бы еще раз применить изложенный метод. Это, впрочем, потребовало бы гораздо более сложных вычислений.

Существуют другие методы приближенного решения уравнений, дающие лучшую точность. Наиболее совершенным из них, позволяющим приближенно вычислять не только действительные, но и комплексные корни уравнения, является метод, предложенный великим русским математиком, создателем неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским (1793—1856).

§ 8. ПОЛЯ

Вопрос о существовании корней алгебраических уравнений, с которым мы уже встречались выше, можно рассматривать с более общей точки зрения. Для этого необходимо ввести одно новое понятие, принадлежащее к числу важнейших понятий алгебры.

Рассмотрим сначала следующие три системы чисел: совокупность всех рациональных чисел, совокупность всех действительных чисел и совокупность всех комплексных чисел. В каждой из этих числовых систем можно выполнять, не выходя за ее пределы, сложение, умножение, вычитание и деление (кроме деления на нуль). Этим они отличаются от системы всех целых чисел, где не всегда выполнимо деление, — нельзя, например, нацело разделить число 2 на число 5, — а также от системы всех положительных действительных чисел, где не всегда выполнимо вычитание.

Читателю уже приходилось встречаться с такими случаями, когда алгебраические операции производятся не над числами: напомним сложение и умножение многочленов, а также встречающееся в физике сложение сил. Впрочем, и при определении комплексных чисел нам пришлось рассматривать сложение и умножение точек плоскости.

Вообще пусть дано некоторое множество (т. е. совокупность) P, состоящее или из чисел, или из объектов геометрической природы, или вообще из некоторых вещей, которые мы назовем *элементами* множества P. Говорят, что в P определены операции сложения и умножения, если для любой пары элементов a, b из P указаны вполне определенный элемент c из P, называемый их *суммой*:

$$c = a + b,$$

и вполне определенный элемент d из P, называемый их *произведением*:

$$d = ab.$$

[1] Множество P с определенными в нем операциями сложения и умножения называется *полем*, если эти операции обладают следующими свойствами I—V.

I. Обе операции коммутативны, т. е. для любых a и b

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

II. Обе операции ассоциативны, т. е. для любых a, b и c

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc).$$

III. Справедлив закон дистрибутивности умножения относительно сложения, т. е. для любых a, b и c

$$a(b+c)=ab+ac.$$

IV. Выполнимо вычитание, т. е. для любых a и b можно найти в P корень уравнения

$$a+x=b,$$

притом только один.

V. Выполнимо деление, т. е. для любых a и b, если только a не равно нулю, можно найти в P корень уравнения

$$ax=b,$$

притом только один.

В условии V говорится о нуле. Его существование можно вывести из условий I—IV. Действительно, если a — произвольный элемент из P, то ввиду IV в P существует вполне определенный элемент, удовлетворяющий уравнению

$$a+x=a$$

(мы в качестве b берем само a). Этот элемент зависит, быть может, от выбора элемента a, и поэтому мы обозначим его через 0_a, т. е.

$$a+0_a=a. \tag{1}$$

Если b — любой другой элемент из P, то снова существует такой единственный элемент 0_b, что

$$b+0_b=b. \tag{2}$$

Если мы докажем, что $0_a=0_b$ при любых a и b, то существование в множестве P элемента, играющего роль нуля для всех элементов a сразу, будет доказано.

Пусть c — корень уравнения

$$a+x=b,$$

существующий ввиду условия IV; следовательно,

$$a+c=b.$$

Прибавим к обеим частям равенства (1) элемент c, что равенства не нарушает ввиду единственности суммы:

$$(a+0_a)+c=a+c.$$

Правая часть этого равенства равна b, а левая ввиду

условий I и II равна $b \dotplus 0_a$. Таким образом,

$$b + 0_a = b.$$

Сравнивая с равенством (2) и учитывая, что по IV существует лишь одно решение уравнения $b \dotplus x = b$, мы приходим, наконец, к равенству

$$0_a = 0_b.$$

Теперь уже доказано, что во всяком поле P существует нуль, т. е. такой элемент 0, что для всех a из P выполняется равенство

$$a + 0 = a,$$

а поэтому формулировка условия V делается вполне осмысленной.

Мы уже имеем три примера полей, а именно поле рациональных чисел, поле действительных чисел и поле комплексных чисел, в то время как множество всех целых чисел или множество положительных действительных чисел полями не являются. Помимо трех названных существует бесконечно много различных других полей. В частности, много различных полей содержится внутри поля действительных чисел, или поля комплексных чисел; это — так называемые числовые поля. Существуют, с другой стороны, поля, более широкие, чем поле комплексных чисел. Элементы этих полей уже не будут называться числами, но сами такие поля используются в различных математических исследованиях. Укажем один пример такого поля.

Рассмотрим всевозможные многочлены

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

с любыми комплексными коэффициентами и любой степени; в частности, многочленами нулевой степени будут просто сами комплексные числа. Если мы будем складывать, вычитать и перемножать многочлены с комплексными коэффициентами по тем же известным нам правилам, что и многочлены с действительными коэффициентами, то поле еще не будет получено, так как деление многочлена на многочлен не всегда может быть выполнено нацело.

Будем теперь рассматривать отношения многочленов

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

или, как говорят, рациональные функции с комплексными коэффициентами, причем условимся

обращаться с ними так, как это принято с дробями. Именно,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

тогда и только тогда, когда

$$f(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x).$$

Далее

$$\frac{f(x)}{g(x)} \pm \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) \pm g(x)u(x)}{g(x)v(x)},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}.$$

Роль нуля играют дроби, числитель которых равен нулю, т. е. дроби вида

$$\frac{0}{g(x)};$$

все дроби этого вида равны, очевидно, между собой. Наконец, если дробь $\frac{u(x)}{v(x)}$ не равна нулю, т. е. $u(x) \not\equiv 0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} : \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x)}{g(x)u(x)}.$$

Легко проверяется, что описанные нами операции над рациональными функциями удовлетворяют всем требованиям, входящим в определение поля, а поэтому можно говорить о поле рациональных функций с комплексными коэффициентами. В этом поле содержится целиком поле комплексных чисел, так как рациональная функция, числитель и знаменатель которой являются многочленами нулевой степени, будет просто комплексным числом, и всякое комплексное число представимо в таком виде.

Не следует думать, что всякое поле или содержится в поле комплексных чисел, или же содержит его внутри себя, — существуют и иные поля, в частности, такие, которые состоят лишь из конечного числа элементов.

Всюду, где используются поля, приходится рассматривать уравнения с коэффициентами из этих полей, а поэтому возникает вопрос о существовании корней таких уравнений. Так, в некоторых вопросах геометрии встречаются уравнения с коэффициентами из поля рациональных функций; корни этих уравнений называются *алгебраическими функциями*. Основная теорема высшей алгебры, относящаяся к уравнениям с числовыми коэффициентами, уже не может быть использована в

случае уравнения с коэффициентами из произвольного поля и заменяется следующими общими теоремами.

Пусть P — некоторое поле и

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

— уравнение n-й степени с коэффициентами из этого поля. Оказывается, что ни в самом поле P, ни в каком-либо большем поле это уравнение не может иметь более чем n корней. Вместе с тем поле P можно расширить до такого поля Q, в котором наше уравнение уже имеет n корней (некоторые из них могут быть кратными). Справедлива даже такая теорема:

Всякое поле P можно расширить до такого поля $\bar{P}$, что любое уравнение с коэффициентами из P и даже любое уравнение с коэффициентами из $\bar{P}$ обладает в $\bar{P}$ корнями, причем число корней равно степени уравнения.

Поле $\bar{P}$, о котором говорится в формулировке этой теоремы, называется *алгебраически замкнутым*. Основная теорема высшей алгебры показывает, что к числу алгебраически замкнутых полей принадлежит поле комплексных чисел.

§ 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассматривали все время уравнения некоторой степени с одним неизвестным. Начало этой теории лежало еще в элементарной алгебре, где после изучения уравнений первой степени перешли к изучению квадратных уравнений. Однако в элементарной алгебре был сделан один шаг и в другом направлении: после изучения одного уравнения первой степени с одним неизвестным там перешли к рассмотрению системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными и системы трех уравнений с тремя неизвестными. Это направление получает дальнейшее развитие в университетском курсе высшей алгебры. Здесь изучаются методы решения любой системы n уравнений первой степени с n неизвестными, а также методы для разыскания решений таких систем уравнений первой степени, у которых число уравнений не равно числу неизвестных. Теория систем уравнений первой степени, а также некоторые связанные с нею теории, в частности, так называемая теория матриц, составляют особую ветвь алгебры — линейную алгебру; по своим применениям в геометрии и в других отраслях

математики, а также в физике и теоретической механике она является первой среди всех частей алгебры.

Впрочем, и теория алгебраических уравнений, и линейная алгебра сейчас представляют собой в значительной мере законченные части науки. Потребности смежных отделов математики и физики привели к тому, что в алгебре на первое место выдвинулось изучение множеств, в которых заданы алгебраические операции. Помимо теории полей, в состав которой входят теория алгебраических чисел и теория алгебраических функций, сейчас разрабатывается также теория колец. Кольцом называется множество с операциями сложения и умножения, в котором выполняются условия I—IV из определения поля, таково, например, множество всех целых чисел. Выше мы упоминали уже о другой очень значительной ветви алгебры — о теории групп; *группа* является множеством с одной алгебраической операцией — умножением, причем эта операция должна быть ассоциативной и должно неограниченно выполняться деление.

Интересно заметить, что в различных приложениях встречаются, притом весьма часто, некоммутативные алгебраические операции — произведение меняется при перестановке сомножителей, а иногда и неассоциативные операции — произведение трех множителей зависит от расположения скобок. В частности, те группы, которые используются при рассмотрении вопроса о решении уравнений в радикалах, являются некоммутативными.

ЛИТЕРАТУРА

Систематическое изложение основ теории алгебраических уравнений и основ линейной алгебры можно найти в учебниках высшей алгебры. Сейчас в университетах и педагогических институтах используются преимущественно следующие учебники:

А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, «Наука», 1971.

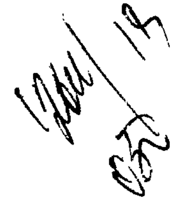
Л. Я. Окунев, Высшая алгебра, «Просвещение», 1966.

Элементарное изложение простейших свойств колец и полей, преимущественно числовых, можно найти в книге:

И. В. Проскуряков. Числа и многочлены, «Просвещение», 1965.

Ознакомление с теорией групп можно начать по книге:

П. С. Александров, Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1951.



ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование.
Вып. 18. **Г. М. Мирякьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. **Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев.** Математические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.
Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние.
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.
Вып. 45. **И. М. Яглом.** Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. **И. М. Соболь.** Метод Монте-Карло.
Вып. 47. **Л. А. Калужнин.** Основная теорема арифметики.
Вып. 48. **А. С. Солодовников.** Системы линейных неравенств.
Вып. 49. **Г. Е. Шилов.** Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. **В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг.** Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. **Н. М. Бескин.** Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. **Н. М. Бескин.** Двенадцать отрезков в данном отношении.
Вып. 53. **Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева.** Стереографическая проекция.